ĐẠI HỌC THÁI NGUYÊN
TRƯỜNG ĐẠI HỌC KHOA HỌC

CAO THỊ THU TRANG

TÍNH TUẦN HOÀN VÀ ỔN ĐỊNH CỦA NGHIỆM PHƯƠNG TRÌNH TIẾN HÓA

LUẬN VĂN THẠC SĨ TOÁN HỌC

THÁI NGUYÊN - 2018

ĐẠI HỌC THÁI NGUYÊN
TRƯỜNG ĐẠI HỌC KHOA HỌC

CAO THỊ THU TRANG

TÍNH TUẦN HOÀN VÀ ỔN ĐỊNH CỦA NGHIỆM PHƯƠNG TRÌNH TIẾN HÓA

Chuyên ngành: **Toán Ứng dụng**
Mã số: **8460112**

LUẬN VĂN THẠC SĨ TOÁN HỌC

NGƯỜI HƯỚNG DẪN KHOA HỌC

PGS.TSKH. NGUYỄN THIỆU HUY

THÁI NGUYÊN - 2018

MỤC LỤC

DANH SÁCH KÍ HIỆU

$\mathbb{N}$	: tập các số tự nhiên.
$\mathbb{R}$	: tập các số thực.
$\mathbb{R}_+$	: tập các số thực không âm.
$L_p(\mathbb{R})$	$:= \left\{ u : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \middle| \|u\|_p = (\int_{\mathbb{R}} \|u(x)\|^p dx)^{1/p} < +\infty \right\}$, $1 \le p < \infty$.
X, Y	: không gian Banach.
$\mathscr{L}(X)$	: không gian các toán tử tuyến tính bị chặn.
$C_b(\mathbb{R}_+, X)$	$:= \left\{ v : \mathbb{R}_+ \to X \mid v \text{ liên tục và } \sup_{t \in \mathbb{R}_+} \|v(t)\| < \infty \right\}$, với chuẩn $\|v\|_{C_b(\mathbb{R}_+, X)} := \sup_{t \in \mathbb{R}_+} \|v(t)\|$.

Lời nói đầu

1. Lí do chọn đề tài

Các phương trình vi phân thường hoặc phương trình vi phân đạo hàm riêng là các mô hình toán học mô tả các hiện tượng trong tự nhiên và kỹ thuật. Trong thực tế mọi sự vận động của tự nhiên, xã hội và kỹ thuật đều phụ thuộc vào thời gian (nhiễu, ngoại lực,...) làm cho phương trình trở nên phức tạp hơn. Cùng với sự phát triển của toán học, các không gian hàm trừu tượng được đưa ra. Bằng cách chọn toán tử thích hợp trong không gian hàm thích hợp các mô hình đó có thể viết dưới dạng phương trình vi phân trừu tượng với các toán tử tác động trong không gian Banach.

Khi nghiên cứu lớp phương trình vi phân trong không gian Banach, chúng ta quan tâm đến điều kiện tồn tại nghiệm, dáng điệu tiệm cận nghiệm của các phương trình. Và một trong những hướng nghiên cứu quan trọng liên quan đến dáng điệu tiệm cận nghiệm của phương trình tiến hóa là tìm các điều kiện cho sự tồn tại của các nghiệm tuần hoàn của phương trình tiến hóa trong trường hợp phần phi tuyến tác động từ một hàm T-tuần hoàn thành một hàm T-tuần hoàn. Có nhiều phương pháp tiếp cận vấn đề này như: phương pháp điểm bất động Tikhonov's (xem [18]), phương pháp hàm Lyapunov (xem [19])... Phương pháp chứng minh sự tồn tại nghiệm tuần hoàn của phương trình thông qua tính bị chặn của các nghiệm và tính compact của ánh xạ Poincare. Tuy nhiên, trong phương trình vi phân đạo hàm riêng có miền xác định không bị chặn hoặc các phương trình vi phân thường có nghiệm không bị chặn, các phép nhúng compact như vậy là không hợp lệ và sự tồn tại các nghiệm bị chặn là không dễ dàng có được vì phải lựa chọn rất cẩn thận điều kiện ban đầu để đảm bảo tính bị chặn của nghiệm tương ứng với điều kiện ban đầu đó.

Vì vậy, trong luận văn này chúng tôi trình bày một hướng tiếp cận khác về sự tồn tại và duy nhất của nghiệm tuần hoàn cho phương trình tiến hóa trừu tượng nhằm mục đích vượt qua những khó khăn đó.

2. Lịch sử nghiên cứu

Đã có nhiều nhà khoa học trong và ngoài nước quan tâm đến sự tồn tại nghiệm, nghiệm tuần hoàn và mối liên hệ giữa nghiệm bị chặn và nghiệm tuần hoàn của các phương trình vi phân. Từ những năm 1950, Massera (xem [10]) đã nghiên cứu mối quan hệ giữa nghiệm tuần hoàn và nghiệm bị chặn của phương trình vi phân thường. Đến năm 2006, Zubelevich sử dụng phương pháp Ergodic mở rộng (xem [16]) để nghiên cứu tính tuần hoàn của nghiệm bị chặn. Cũng sử dụng phương pháp Ergodic mở rộng, Nguyễn Thiệu Huy (xem [7]) đưa ra được điều kiện tồn tại nghiệm tuần hoàn của phương trình Navier-Stokes. Từ đó, Nguyễn Thiệu Huy cùng với nhóm nghiên cứu đã có một số kết quả nghiên cứu về nghiệm tuần hoàn của lớp phương trình tiến hóa nửa tuyến tính trong trường hợp phần tuyến tính sinh ra họ tiến hóa có nhị phân mũ, phần phi tuyến thỏa mãn điều kiện Lipchitz không đều và không đủ nhỏ. Luận văn này trình bày trường hợp riêng của bài báo [8].

3. Mục đích, đối tượng và phạm vi nghiên cứu

* Mục đích nghiên cứu:

Trình bày kết quả về sự tồn tại và duy nhất nghiệm tuần hoàn của các phương trình tiến hóa tuyến tính không thuần nhất và phương trình tiến hóa nửa tuyến tính.

Trình bày về tính ổn định có điều kiện nghiệm tuần hoàn của phương trình tiến hóa nửa tuyến tính.

* Đối tượng và phạm vi nghiên cứu của luận văn:

Các phương trình tiến hóa tuyến tính không thuần nhất và phương trình tiến hóa nửa tuyến tính.

Nghiệm bị chặn và tính chất nghiệm tuần hoàn của các phương trình tiến hóa tuyến tính và nửa tuyến tính.

4. Phương pháp nghiên cứu

Trong luận văn, chúng tôi sử dụng các phương pháp sau:

Phương pháp lý thuyết về nửa nhóm, nhị phân mũ để biểu diễn nghiệm đủ tốt của phương trình vi phân.

Phương pháp trung bình Ergodic, Định lý Banach-Alaoglu cho không gian Banach khả ly, nguyên lý điểm bất động.

5. Cấu trúc và kết quả của luận văn

Ngoài phần Mở đầu, Kết luận và Tài liệu tham khảo, luận văn bao gồm ba chương

- **Chương 1**: Chúng tôi trình bày các khái niệm về nửa nhóm liên tục mạnh, tính nhị phân mũ của nửa nhóm và một số tính chất cơ bản của các khái niệm đó. Đồng thời, chúng tôi cũng nêu lại khái niệm về một số không gian và các định lý quan trọng được sử dụng trong chứng minh các kết quả của luận văn.

- **Chương 2**: Chúng tôi trình bày kết quả về tồn tại duy nhất nghiệm tuần hoàn của phương trình tiến hóa tuyến tính không thuần nhất có dạng

$$\begin{cases} \dfrac{du}{dt} = Au(t) + f(t) \quad \text{với } t > 0 \\ u(0) = u_0 \in X, \end{cases} \tag{1}$$

  ở đây toán tử tuyến tính A sinh ra nửa nhóm $(e^{At})_{t\geq 0}$ trên không gian Banach X; toán tử f lấy giá trị trong không gian Banach là hàm tuần hoàn với chu kì T thỏa mãn điều kiện Lipschitz địa phương.

- **Chương 3**: Trình bày kết quả về sự tồn tại duy nhất nghiệm tuần hoàn của phương trình tiến hóa nửa tuyến tính có dạng

$$\begin{cases} \dfrac{du}{dt} = Au(t) + g(t,u) \text{ với } t > 0 \\ u(0) = u_0 \in X, \end{cases} \tag{2}$$

  ở đây toán tử phi tuyến $g(t,u)$ là hàm tuần hoàn với chu kì T thỏa mãn điều kiện Lipschitz địa phương. Trong trường hợp A sinh ra nửa nhóm $(e^{At})_{t\geq 0}$ có nhị phân mũ, chúng tôi xây dựng công thức nghiệm bị chặn Lyapunov-Perron. Từ đó nghiên cứu tính tồn tại duy nhất và ổn định có điều kiện nghiệm tuần hoàn của phương trình tiến hóa nửa tuyến tính (2).

Chương 1

KIẾN THỨC CHUẨN BỊ

Trong chương này, chúng tôi trình bày các khái niệm và tính chất của nửa nhóm liên tục mạnh, tính nhị phân mũ của nửa nhóm, không gian Banach và một số kiến thức cơ sở phục vụ chứng minh kết quả của chương sau.

1.1 Nửa nhóm liên tục mạnh, tính ổn định và nhị phân mũ

1.1.1 Nửa nhóm liên tục mạnh

Định nghĩa 1.1.1. Cho không gian Banach X, họ $(T(t))_{t\geq 0} \subset \mathscr{L}(X)$ được gọi là một nửa nhóm liên tục mạnh nếu

(i) $T(t+s) = T(t)T(s)$, $\forall t,s \geq 0$;

(ii) $T(0) = I$ toán tử đồng nhất;

(iii) $\lim\limits_{t\to 0^+} T(t)x = T(0)x$, $\forall x \in X$.

Định nghĩa 1.1.2. Toán tử $A : D(A) \subseteq X \to X$ xác định bởi

$$Ax := \lim_{h\to 0^+} \frac{1}{h}(T(h)x - x)$$

trên miền xác định $D(A) = \left\{ x \in X : \lim\limits_{h\to 0^+} \frac{1}{h}(T(h)x - x) \textit{ tồn tại} \right\}$ gọi là *toán tử sinh* của nửa nhóm liên tục mạnh $(T(t))_{t\geq 0}$ trên không gian Banach X.

Định lý 1.1.3. *Đối với toán tử sinh A của nửa nhóm liên tục mạnh* $(T(t))_{t\geq 0}$ *ta có*

(i) $A : D(A) \subset X \to X$ *là toán tử tuyến tính;*

(ii) *Nếu* $x \in D(A)$ *thì* $T(t)x \in D(A)$
và $\frac{d}{dt}T(t)x = T(t)Ax = AT(t)x, \forall t \geq 0$*;*

(iii) $\forall t \geq 0, x \in X$ *ta có* $\int\limits_0^t T(s)xds \in D(A)$*;*

(iv) $\forall t \geq 0$ *ta có*

$$\begin{aligned} T(t)x - x &= A\int_0^t T(s)xds \text{ nếu } x \in X \\ &= \int_0^t T(s)Axds \text{ nếu } x \in D(A). \end{aligned}$$

Định nghĩa 1.1.4. Cho $(A, D(A))$ là toán tử đóng trong không gian Banach X. Tập các giá trị chính quy (tập giải) của A là

$$\rho(A) = \{\lambda \in \mathbb{C} \mid (\lambda I - A) \text{ là song ánh } \}.$$

Khi đó

$$\begin{aligned} R(\lambda, A) &:= (\lambda I - A)^{-1}, \lambda \in \rho(A) \text{ là giải thức của A}, \\ \sigma(A) &:= \mathbb{C} \setminus \rho(A) \text{ gọi là tập phổ của A}. \end{aligned}$$

Định lý 1.1.5. *Cho* $(T(t))_{t\geq 0}$ *là nửa nhóm liên tục mạnh trên không gian Banach X, lấy hằng số* $\omega \in \mathbb{R}, M \geq 1$ *sao cho* $\|T(t)\| \leq Me^{\omega t}, \forall t \geq 0$*. Khi đó với toán tử sinh* $(A, D(A))$ *của nửa nhóm* $(T(t))_{t\geq 0}$ *ta có các tính chất sau*

(i) *Nếu* $\lambda \in \mathbb{C}$ *sao cho* $R(\lambda)x := \int\limits_0^\infty e^{-\lambda s}T(t)xds$ *tồn tại,* $\forall x \in X$ *thì*
$\lambda \in \rho(A)$ *và* $R(\lambda, A) = R(\lambda)$*;*

(ii) *Nếu* $Re\lambda > \omega$ *thì* $\lambda \in \rho(A)$ *và* $R(\lambda, A) = R(\lambda)$*;*

(iii) $\|R(\lambda, A)\| \leq \frac{M}{Re\lambda - \omega}, \forall Re\lambda > \omega$*.*

Chú ý rằng, công thức $R(\lambda, A)x = \int\limits_0^{+\infty} e^{-\lambda s}T(s)xds$ *gọi là biểu diễn tích phân của giải thức. Tích phân ở đây là tích phân Riemann suy rộng*

$$\int_0^{+\infty} e^{-\lambda s}T(s)xds = \lim_{t\to+\infty}\int_0^t e^{-\lambda s}T(s)xds.$$

1.1.2 Nửa nhóm giải tích

Các kiến thức về nửa nhóm giải tích được trình bày chi tiết trong tài liệu [9].

Định nghĩa 1.1.6. Toán tử A được gọi là toán tử quạt (*sectorial operator*) nếu $\omega \in \mathbb{R}, \theta \in (\dfrac{\pi}{2}, \pi), M > 0$ sao cho các điều kiện sau thỏa mãn

1. $\rho(A) \supset S_{\theta,\omega} = \{\lambda \in \mathbb{C}, \lambda \neq \omega, |arg(\lambda - \omega)| < \theta\}$;
2. $\|R(\lambda, A)\| \leq \frac{M}{|\lambda - \omega|}$; với mọi $\lambda \in S_{\theta,\omega}$.

Nếu thêm điều kiện $\rho(A) \neq \emptyset$ thì A là đóng. Do đó $D(A)$ với chuẩn đồ thị

$$\|x\|_{D(A)} := \|x\| + \|Ax\|$$

là không gian Banach. Với toán tử quạt A, chúng ta có thể xác định toán tử tuyến tính bị chặn e^{tA} theo tích phân Dunford

$$e^{At} := \frac{1}{2\pi i} \int_{\omega + \gamma_{r,\eta}} e^{t\lambda} R(\lambda, A) d\lambda, t > 0, \tag{1.1}$$

trong đó $r > 0, \eta \in (\frac{\pi}{2}, \theta)$ và $\gamma_{r,\eta}$ là đường cong

$$\{\lambda \in \mathscr{C}_{\mathbb{R}_-} : |\arg\lambda| = \eta, |\lambda| \geq r\} \cup \{\lambda \in \mathscr{C}_{\mathbb{R}_-} : |\arg\lambda| \leq \eta, |\lambda| = r\}$$

hướng ngược chiều kim đồng hồ. Ngoài ra

$$e^{0A}x = x, \text{ với mọi } x \in X. \tag{1.2}$$

Do hàm $\lambda \mapsto e^{t\lambda} R(\lambda, A)$ là chỉnh hình trong $S_{\theta,\omega}$ nên e^{tA} độc lập với việc chọn r và η

Định nghĩa 1.1.7. Với $A : D(A) \subset X \to X$ là toán tử quạt. Họ $\{e^{tA} : t \geq 0\}$ xác định bởi (1.1)-(1.2) được gọi là nửa nhóm giải tích sinh bởi toán tử A trong X.

Định lý 1.1.8. *Với toán tử quạt A ta có các khẳng định sau*

1. $e^{tA} \in D(A^k)$ *với mọi* $t > 0, x \in X, k \in \mathbb{N}$. *Nếu* $x \in D(A^k)$, *thì* $A^k e^{tA} x = e^{tA} A^k x$, *với mọi* $t \geq 0$;
2. $e^{tA} e^{sA} = e^{(t+s)A}$ *với mọi* $t, s \geq 0$;